Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de de Matemática
Disciplina: Cálculo II Unificado - MAC128
Data: 01/03/2016

Prova Final

1. **Questão 1**. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável no ponto $(1,2)$. Sabe-se que o plano tangente ao gráfico de $f(x,y)$ no ponto $(1,2)$ é dado por $x+2y+3z=11$. Quanto valem $f_x(1,2)$, $f_y(1,2)$ e $f(1,2)$, respetivamente?
   (a) $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$ e 2
   (b) 1, 2 e 11
   (c) $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ e 2
   (d) $-\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{3}$ e 11
   (e) Não sei.

2. Considere os seguintes limites:
$$(1) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} \qquad (2) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^4}.$$
   (a) (1) existe; (2) não existe
   (b) (1) existe; (2) existe
   (c) (1) não existe; (2) existe
   (d) (1) não existe; (2) não existe
   (e) Não sei.

3. A interseção dos 2 planos de equações
$$x+y+z=1 \quad \text{e} \quad -x-y+z=1$$
é a reta parametrizada por:
   (a) $\mathbf{r}(t)=(t,-t,1), \quad t\in\mathbb{R}$
   (b) $\mathbf{r}(t)=(2t,-2t,1+t), \quad t\in\mathbb{R}$
   (c) $\mathbf{r}(t)=(t,t,1+t), \quad t\in\mathbb{R}$
   (d) $\mathbf{r}(t)=(-t,-t,1+t), \quad t\in\mathbb{R}$
   (e) Não sei.

4. Seja $f(x,y)=x^2y^4+x^4y^2$ e $\mathcal{C}$ a curva de nível 2 de f. A equação da reta tangente a $\mathcal{C}$ em $(1,-1)$ é
   (a) $y=x-2$
   (b) $y=x+2$
   (c) $y=-3x+2$
   (d) $y=-x$
   (e) Não sei.

5. Considere $f(x,y)=2x+3y^2$ e o conjunto
$$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 4\}.$$
Então valores mínimo e de máxino absoluto de f no conjunto A são respectivamente:
   (a) 0 e 37/3
   (b) 0 e 12
   (c) 1 e 4
   (d) 1 e 12
   (e) Não sei.

6. Se $A\in\mathbb{R}$, a equação diferencial $y''+4y'+4y=3e^{-2x}$ tem uma solução da forma
   (a) $xe^{-2x}+Ax^2e^{-2x}$
   (b) Ae^{-2x}
   (c) Axe^{-2x}
   (d) $e^{-2x}+Axe^{-2x}$
   (e) Não sei.

7. Considere o elipsoide $x^2+y^2+2z^2=1$. Por quais dos seguintes pares de pontos o elipsoide possui planos tangentes paralelos?
   (a) $(0,1,0)$ e $(0,-1,0)$
   (b) $(0,0,1)$ e $(0,0,-1)$
   (c) $(0,1,0)$ e $(1,0,0)$
   (d) $(0,1,0)$ e $(-1,0,0)$
   (e) Não sei.

8. Sejam $\mathbf{u}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ e $\mathbf{v}=(\frac{1}{\sqrt{5}},\frac{2}{\sqrt{5}})$. Sabendo que $f(x,y)$ é uma função diferenciável tal que $D_{\mathbf{u}}f(0,0)=1$ e $D_{\mathbf{v}}f(0,0)=2$, podemos afirmar que:
   (a) $\nabla f(0,0)=(2\sqrt{2}-2\sqrt{5})\mathbf{i}+(2\sqrt{5}-\sqrt{2})\mathbf{j}$
   (b) $\nabla f(0,0)=(\sqrt{2}-\sqrt{5})\mathbf{i}+(\sqrt{5}-\sqrt{2})\mathbf{j}$
   (c) $\nabla f(0,0)=(2\sqrt{2}-\sqrt{5})\mathbf{i}+(2\sqrt{5}-\sqrt{2})\mathbf{j}$
   (d) $\nabla f(0,0)=(\sqrt{5}-\sqrt{2})\mathbf{i}+(2\sqrt{2}-\sqrt{5})\mathbf{j}$
   (e) Não sei.

9. Em qual ponto da curva parametrizada por $\mathbf{r}(t)=(3t^2-3t,t^3)$, $t\in\mathbb{R}$, o vetor tangente é paralelo ao vetor $\mathbf{u}=(1,1)$?
   (a) $(0,1)$
   (b) $(1,0)$
   (c) $(1,1)$
   (d) $(1,-1)$
   (e) Não sei.

10. O comprimento da curva parametrizada por $\mathbf{r}(t)=\big(t\cos t, t\sin t, 2t^{3/2}\sqrt{2}/3\big)$, $t\in[0,2\pi]$, é:
   (a) $2\pi(\pi+1)$
   (b) $\pi(2\pi+1)$
   (c) $2\pi(2\pi+1)$
   (d) $\pi(\pi+1)$
   (e) Não sei.

11. A solução geral de $e^{2t}y'+2e^{2t}y=e^t$ é:
   (a) $y=e^{-t}+Ce^{-2t}$
   (b) $y=-e^{-3t}+Ce^{-2t}$
   (c) $y=e^{-2t}+Ce^{-2t}$
   (d) $y=e^{-t}+Ce^{-t}$
   (e) Não sei.

Nome: ______________________________

12. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $\mathcal{S}$ a superfície de nível 1 de f. Suponha que existe um ponto P em $\mathcal{S}$ tal que o plano $2x+2y+8z = 128$ seja tangente a $\mathcal{S}$ em P. Qual das afirmativas abaixo é verdadeira?
    (a) $\nabla f(P) = (\sqrt{8}, \sqrt{8}, \sqrt{128})$
    (b) $\nabla f(P) = (\sqrt{8}, \sqrt{8}, 1)$
    (c) $\nabla f(P) = (2, 2, \sqrt{128})$
    (d) $\nabla f(P) = (1, 1, 1)$
    (e) Não sei.

13. Seja $f(x, y) = x^4 + y^4$. Então $(0, 0)$ é:
    (a) ponto de mínimo local e absoluto
    (b) ponto de mínimo local e não absoluto
    (c) ponto de máximo local e não absoluto
    (d) ponto de sela
    (e) Não sei.

14. Seja $f(x, y) = ax^2 + xy + ay^2$, onde $a \in \mathbb{R}$. Então $(0, 0)$ é ponto de máximo local se:
    (a) $a < -1/2$
    (b) $-1/2 < a < 0$
    (c) $0 < a < 1/2$
    (d) $a > 1/2$
    (e) Não sei.

15. Seja $f(x, y, z) = x + y + z$. Considere a curva $\mathcal{C}$ dada pela interseção das superfícies de equações $x^2+y^2 = 1$ e $x + y - z = 1$. Então o valor máximo de $f(x, y)$ em $\mathcal{C}$ é:
    (a) $2\sqrt{2} - 1$
    (b) $2\sqrt{2} + 1$
    (c) 3
    (d) $3\sqrt{2}$
    (e) Não sei.